Od centralności siły do II prawa Keplera

Od prawa odwrotności kwadratu do I prawa Keplera

– wyprowadzenie równania toru orbity

1. Druge prawo Keplera

Siła jest **centralna (a pole sił centralne),** jeśli w układzie odniesienia mamy jeden wyróżniony punkt, utożsamiony z masywnym ciałem – centrum oddziaływania, siła jest zawsze skierowana radialnie, w kierunku ku (dośrodkowo) albo od (odśrodkowo) tego centrum, a jej wartość zależy wyłącznie od odległości od centrum.

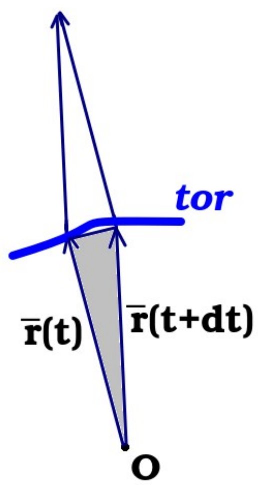
Nb. Siła centralna jest zachowawcza, czyli jej pole jest potencjalne (energia potencjalna jest jednoznacznie określona w każdym punkcie, a praca tej siły po każdym torze zamkniętym wynosi zero).

Gdy siła jest centralna, tj. $\vec{F} \;=\; F(\vec{r}\,)\,\hat{r}$, to wówczas (oznaczając przez *p* pęd ciała) nieuchronnie mamy $\vec{r} \times \dfrac{d\,\vec{p}}{dt} \;\equiv\; \vec{r} \times \vec{F} \;=\; 0$, bo kierunki wektora położenia i siły są zgodne. Skądinąd także $\dfrac{d\,\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \;\equiv\; \vec{v} \times m\,\vec{v} \;=\; 0$, bo mnożymy wektor prędkości sam ze sobą. A zatem, zaledwie przy założeniu, że siła jest centralna, otrzymujemy wniosek, że

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \;\equiv\; \frac{d\,\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \;+\; \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{dt} \;=\; 0\,;\;\; \vec{r} \times \vec{p} = \overrightarrow{Const} =: \vec{L}\;\; .$$

Wprowadzony jako iloczyn położenia i pędu *moment pędu L* jest wielkością wektorową stałą w ruchu wywołanym siłą centralną. A skoro moment pędu nie zmienia swej orientacji w przestrzeni, oznacza to, że ruch odbywa się stale w tej samej płaszczyźnie. Wobec czego, do opisu tego ruchu korzystne będzie wprowadzić zmienne biegunowe, czego też dokonamy w punkcie 2.

Tymczasem skupmy naszą uwagę na wektorze położenia wychodzącym z centrum O, a który podczas ruchu wskazuje na kolejne punkty na torze, jakie osiąga ciało. Niech wektor *r* zostawia po sobie trwały ślad na płaszczyźnie tam, gdzie dotychczas leżał: ślad ten będzie zapełniał nam pole pod pokonaną częścią toru. Zauważmy, że kontur, jaki zatacza (zamalowuje) w chwili czasu *dt* wektor wodzący *r*, stanowi dokładnie połowę pola równoległoboku (zob. obrazek), określonego co do wartości iloczynem wektorowym $\vec{r}\,(t)\times\vec{r}\,(t+dt)$ dwóch wektorów położeń w chwili *t* oraz *t*+*dt*.



Jako, że przyrost czasu *dt* pomiędzy tymi dwoma pomiarami położenia jest w granicy infinitezymalnie mały, równość ta jest ścisła, a niedopasowanie siecznej toru (domykającej trójkąt) do kształtu toru w granicy staje się zerowe. Odległości na obrazku są wyolbrzymione dla czytelności.

Ale, skoro ciało w momencie *t* charakteryzuje się prędkością *v*, to

$$\vec{r}(t+dt) \ = \ \vec{r}(t)+d\vec{r} \ = \ r(t)+\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt \ = \ \vec{r}(t)+\vec{v}(t)dt$$

i nasze pole zakreślanego trójkąta jest w rzeczywistości równe $\vec{A} \ = \ \frac{1}{2}\vec{r}(t)\times\vec{r}(t+dt) \ = \ \frac{1}{2}\vec{r}(t)\times[\vec{r}(t)+\vec{v}(t)dt] \ = \ 0+\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\,dt$. Szybkość zmian tego pola, znana pod pojęciem *prędkości polowej*, jest dana formułą

$$\dot{\vec{A}} \ = \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}\,dt) \ = \ \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\,dt \ + \ \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\frac{dt}{dt} \ = \ \frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v}\,dt \ + \ \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} \ = \ \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} \ .$$

Mnożąc prędkość polową przez stałą masę *m*, którą dopiszemy do drugiego czynnika iloczynu, otrzymujemy $m\dot{\vec{A}} \ = \ \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{p} \ = \ \frac{1}{2}\vec{L} \ = \ \vec{Const}$. W ten sposób otrzymaliśmy treść **drugiego prawa Keplera**, głoszącego, że **w ruchu orbitalnym prędkość polowa pozostaje zachowana.** Konsekwencją tego faktu jest przyspieszanie ciała ku peryhelium (bądź perygeum), gdzie promień wodzący jest najkrótszy, aby następnie zwalniać aż do osiągnięcia minimalnej prędkości (liniowej) w aphelium (apogeum), gdzie promień wodzący jest najdłuższy. Gwarantuje to li tylko centralność siły grawitacji – nie poczyniliśmy co do ruchu żadnych dodatkowych założeń.

2. I prawo Keplera

Jest ono konsekwencją **prawa odwrotności kwadratu,** które żąda od siły centralnej, aby była ona przyciągająca i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości. Na tym etapie (historycznie oraz technicznie rzecz biorąc) nie musi być znane ścisłe wyrażenie na newtonowską siłę grawitacyjną, ale skorzystamy od razu z jej gotowej postaci.

Mamy zatem $\vec{F}_{gr} \ = \ -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\hat{r}$. Można powiedzieć, że przyciągająca (minus) i centralna $(\hat{r})$ siła o stałej proporcjonalności *G*, wytwarzana przez masywne ciało (*M*) działa na ciało próbne (*m*) odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości pomiędzy masami ($\frac{1}{r^2}$), albo, równoważnie, że ciało próbne napotyka w położeniu $\vec{r}$ roztaczane przez centralne masywne ciało pole grawitacyjne o natężeniu $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$. Kierunek radialny siły grawitacji (a więc i stała płaszczyzna ruchu) uzasadnia wprowadzenie współrzędnych biegunowych $(r;\varphi)$. Dla przypomnienia sobie, jak rozpisują się prędkość i przyspieszenie w tych współrzędnych, korzystna może być w tym miejscu lektura innego artykułu autora pt. *Prędkość i przyspieszenie we współrzędnych biegunowych.*

Moment pędu, wyrażony w tych współrzędnych, będzie miał następującą postać:

$$\vec{L} = r\,\hat{r} \times m(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}) = mr^2\,\dot{\varphi}\,\hat{A} \quad ,$$

zaś dynamiczne równanie ruchu

$$\begin{gathered} \vec{F} = m\,\vec{a} \\ -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = m\,a_r\hat{r} = m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\hat{r} \\ -\frac{GM}{r^2} = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 \ . \end{gathered}$$

Nie rozwiążemy tego równania wprost. Aby otrzymać interesujące nas rozwiązanie na *r*, tj. równanie toru ruchu, $r(\varphi)$, należy wpierw zaadresować dwa problemy:

- Po pierwsze, siła zawiera zmienną zależną *r* w mianowniku. To równanie będzie miało czytelniejszą postać, kiedy wprowadzimy nową zmienną, będącą odwrotnością *r* i która tym samym trafi do licznika, a jej pochodna czasowa nie wprowadza żadnego nowego utrudnienia;
- Po wtóre, równanie zawiera nie tylko *r*, ale i drugą funkcję czasu, tj. kąt *φ*. Stąd pomysł, żeby zamiast po czasie, sparametryzować nasze równanie po *φ*, które jest równie dobrą, bo ciągłą i monotonicznie rosnącą (jak się spodziewamy) funkcją czasu. Gdyby tak nie było (tzn. *φ* momentami malałoby w czasie), ciało wykonywałoby niezrozumiałe ewolucje w przestrzeni, odginając czasem swój tor ruchu od centrum przyciągania pod wpływem innej siły, która nie istnieje. Dodatkowa korzyść: pochodna *φ* po *φ* będzie trywialna (wyniesie 1).

Jeśli zatem $u := \frac{1}{r}$, to moment pędu $L = m\,\frac{1}{u^2}\,\dot{\varphi} \equiv \frac{m}{u^2}\,\frac{d\varphi}{dt}$. Trzymając w pamięci fakt że wartość *L* jest stałą ruchu, piszemy $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Lu^2}{m}$. Dzięki temu możemy napisać

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi} = \frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\varphi} \quad .$$

Już zatem wiemy, jak wyrazić przyspieszenie w nowej zmiennej zależnej u i niezależnej φ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi} \quad ;$$

różniczkując ponownie po czasie otrzymujemy:

$$\frac{d^2}{dt^2}r = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\varphi}\right) = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} \quad .$$

Wobec czego, nasze dynamiczne równanie Newtona uzyskuje swoją ostateczną postać:

$$-GMu^2 = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{Lu^2}{m}\right)^2 \quad .$$

Po skróceniu i uporządkowaniu wyrazów, mamy

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2} =: C \quad .$$

Otrzymaliśmy wyjątkowo proste równanie niejednorodne ze stałym wolnym wyrazem. Druga pochodna u (po kącie φ) musi być równa samemu u modulo stała addytywna. Oczywistym rozwiązaniem jest $u = C + A\cos(\varphi - \varphi_0)$, gdzie wprowadziliśmy dwie stałe całkowania: fazę i amplitudę. Tak więc nasze rozwiązanie toru ruchu pod wpływem siły grawitacyjnej Newtona ma postać

$$r = \frac{1}{C + A\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad ,$$

co stanowi równanie elipsy. Jest to również treść **pierwszego prawa Keplera: ciała niebieskie poruszają się po zamkniętych orbitach eliptycznych wokół swego Słońca.** Tradycyjnie, równanie to przestawia się w równoważnych do naszego formach:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad ,$$

gdzie p to *parametr* elipsy, zaś e stanowi jej *ekscentryczność* (czyli *mimośród*), albo

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos(\varphi - \varphi_0) \quad ,$$

przy czym a wyraża *półoś wielką* elipsy. Porównanie tych trzech postaci pozwoli Czytelnikowi wyrazić *a,* e i *p* względem siebie wzajemnie oraz względem stałych ruchu.

Bardzo interesujący jest fakt wynikający z dużo bardziej złożonych obliczeń, że jedynymi siłami centralnymi, które gwarantują zamknięty tor ruchu, są siły $F \propto -\frac{1}{r^2}$ oraz $F \propto r^4$. Biorąc pod uwagę, że siła grawitacji ma charakter przyciągający, i obserwując zamkniętość torów planet (regularną powtarzalność ich ruchu), wnioskujemy stąd, że siła grawitacyjna musi mieć charakter „odwrotności kwadratu”.

Natężenie siły grawitacyjnej (gęstość linii sił pola, wychodzących z centrum oddziaływania) spada wraz z odległością jak $\frac{1}{r^2}$, ponieważ ta sama energia oddziaływania (liczba linii sił) rozkłada się na pole sfer o coraz większych promieniach, wraz z oddalaniem się od centrum. W przypadku przestrzeni trójwymiarowej pole sfery wynosi $4\pi r^2$. Gdyby liczba wymiarów geometrycznych była inna, inna byłaby również potęga *r* (np. w przypadku dwóch wymiarów mamy $2\pi r$). Wówczas inne prawo grawitacji, niż „odwrotności kwadratu” obowiązywałoby w naszej przestrzeni. A zatem obserwowany charakter ruchu planet wokół Słońca stanowi również dowód na to, że… nasza przestrzeń geometryczna jest trójwymiarowa! Nie jesteśmy dwuwymiarowymi płaszczakami, którym się jedynie wydaje, że żyją przestrzennie. Zgodność z obserwacjami praw Keplera determinuje trójwymiarowość naszej przestrzeni.

Autor: Marek Pietrachowicz.